Διαγώνισμα Προσομοιώσεις (2) 2020
Μαθηματικά προσανατολισμού Θετικών Σπουδών & Σπουδών Οικονομίας και Πληροφορικης

Μαρής Θωμάς
Μαθηματικός

Θέμα Α

Α1. Πότε δυο συναρτήσεις f και g είναι ίσες;

Μονάδες 2

Α2. Τι ονομάζουμε σύνθεση της f με τη g;

Μονάδες 3

Α3. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση $f(x)=\ln|x|,\ x\in\mathbb{R}^*$ είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}^*$ και ισχύει $(\ln|x|)'=\frac{1}{x}$.

Μονάδες 5

Α4. Να αποδείξετε ότι για μια συνάρτηση f η οποία είναι συνεχής σε ένα διάστημα Δ, τότε:

- Αν $f'(x)>0$ σε κάθε εσωτερικό σημείο x του Δ, τότε η f είναι γνησίως αύξουσα σε όλο το Δ.
- Αν $f'(x)<0$ σε κάθε εσωτερικό σημείο x του Δ, τότε η f είναι γνησίως φθίνουσα σε όλο το Δ.

Μονάδες 6

Α5. Δίνονται οι παρακάτω ισχυρισμοί. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις ως Σωστό ή Λάθος και να αιτιολογήσετε την απάντηση σας.

α. «Τα κρίσιμα σημεία μιας συνάρτησης είναι πάντα θέσεις τοπικών ακροτάτων.»

β. «Αν $\lim\limits_{x\to x_o}|f(x)|=0$ τότε και $\lim\limits_{x\to x_o}f(x)=0$.»

Μονάδες (1+2)x2=6

Α6. Αν $f(x)=\sigma\upsilon\nu^3(x+1)$ τότε η $f'(x)$ ισούται με:

Α) $3\sigma\upsilon\nu^3(\pi+1)\eta\mu(\pi+1)$

Β) $3\sigma\upsilon\nu^2(\pi+1)$

Γ) $-3\sigma\upsilon\nu^2(\pi+1)\eta\mu(\pi+1)$

Γ) $3\pi\sigma\upsilon\nu^2(\pi+1)$

Να γράψετε στο τετράδιο σας το γράμμα που αντιστοιχεί στη σωστή απάντηση.

Μονάδες 3

Θέμα Β

Δίνονται οι συναρτήσεις $h(x)=\ln x$, $x>0$ και $k(x)=x^2+2x-3$, $x\in\mathbb{R}$.

Β1. Να βρείτε τις συναρτήσεις $h\circ k$ και $k\circ h$.

Μονάδες 6

Β2. Αν $f(x)=(k\circ h)(x)=\ln^2 x+2\ln x-3,\ x\in(0,+\infty)$, τότε:

α. Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα.

Μονάδες 5

β. Να υπολογίσετε το όριο $\lim\limits_{x\to e}\left(f(x)\cdot\eta\mu\left(\frac{1}{x-e}\right)\right)$.

Μονάδες 3

γ. Να δείξετε ότι $\ln(e\cdot\pi)\cdot\ln\left(\frac{e}{\pi}\right)<2\ln\left(\frac{\pi}{e}\right)$.

Μονάδες 2

Δίνεται ακόμα η ευθεία **(η):2x-3y+2020=0.**

Β3. Να δείξετε ότι υπάρχει ένα τουλάχιστον $x_o\in\left(\frac{1}{e},1\right)$ τέτοιο ώστε η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f στο $A\left(x_o,f\left(x_o\right)\right)$ να είναι και αυτή παράλληλη στην ευθεία (η).

Μονάδες 5

Β4. Αν $g(x)=(h\circ k)(x)=\ln\left(x^2+2x-3\right),\ x\in(-\infty,-3)\cup(1,+\infty)$. Να βρείτε την εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της g που είναι παράλληλη στην ευθεία (η).

Μονάδες 4

Θέμα Γ

Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=e^x,\ x\in\mathbb{R}$.

Γ1. Να δείξετε ότι η εφαπτομένη της C_f στο σημείο Α(α,f(α)) σχηματίζει με τους άξονες τρίγωνο με εμβαδόν που δίνεται από τον τύπο $E(\alpha)=\frac{1}{2}e^{\alpha}(\alpha-1)^2,\ \alpha\in\mathbb{R}$.

Μονάδες 5

Γ2. Να μελετήσετε την συνάρτηση Ε(α) ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα και να αποδείξετε ότι στο σημείο που παρουσιάζει τοπικό ελάχιστο η εφαπτομένη της C_f διέρχεται από την αρχή των αξόνων.

Μονάδες 6

Γ3. Αν $\alpha\geq 0$ να αποδείξετε ότι υπάρχουν ακριβώς δυο σημεία της C_f στο οποίο η εφαπτομένη στο Α να σχηματίζει με τους άξονες εμβαδόν ίσο με $\frac{1}{2}$ τετραγωνικές μονάδες.

Μονάδες 4

Γ4. Να δείξετε ότι για κάθε x>0 ισχύει $E\left(e^x\right)>E\left(1+x+\frac{1}{2}x^2\right)$.

Μονάδες 7

Γ5. Αν η τετμημένη του σημείου Α αυξάνεται με ρυθμό $1\,cm/sec$ να βρείτε το ρυθμό μεταβολής του εμβαδού του τριγώνου που σχηματίζει η εφαπτομένη της C_f στο Α(α,f(α)) με τους άξονες την χρονική στιγμή που αυτή είναι ίση με 2 cm.

Μονάδες 3

Θέμα Δ

Δίνεται η παραγωγίσιμη συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ για την οποία ισχύει:

- $(x^2+1)f''(x)=1-2xf'(x)$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$.
- Η γραφική παράσταση της συνάρτησης f εφάπτεται στον άξονα x΄x στην αρχή των αξόνων.

Δ1. Να δείξετε ότι $f'(x)=\dfrac{x}{x^2+1}$, $x\in\mathbb{R}$ (Μονάδες 3), η συνάρτηση $k(x)=2f(x)-\ln(x^2+1)$, $x\in\mathbb{R}$ είναι σταθερή (Μονάδες 2) και να βρείτε τον τύπο της συνάρτησης f (Μονάδες 1).

Μονάδες 6

Δ2. Να δείξετε ότι $\left|\dfrac{x}{x^2+1}\right|\le\dfrac{1}{2}$, για κάθε $x\in\mathbb{R}$ (Μονάδες 2) και ότι ισχύει $\left|f(\beta)-f(\alpha)\right|\le\dfrac{1}{2}\left|\beta-\alpha\right|$ για κάθε $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$.(Μονάδες 6)

Μονάδες 8

Αν $f(x)=\dfrac{\ln(x^2+1)}{2}$, $x\in\mathbb{R}$ και $h(x)=\dfrac{x}{2f(x)}$, $x\in\mathbb{R}^*$ τότε:

Δ3. Να δείξετε ότι η συνάρτηση $g(x)=2f(x)-\dfrac{2x^2}{x^2+1}$, $x\in\mathbb{R}$ έχει τρεις ρίζες στο πεδίο ορισμού της, τις x_o, 0 και x_1 με $x_o<-1$ και $x_1>1$.

Μονάδες 7

Δ4. Να δείξετε ότι η συνάρτηση h(x) έχει ένα τοπικό μέγιστο και ένα τοπικό ελάχιστο.

Μονάδες 4

Ευχόμαστε Επιτυχία!

Διάρκεια εξέτασης 3 ώρες

Δυνατή αποχώρηση σε 60 λεπτά.

1

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ

ΘΕΜΑ Α

A1) Θεωρία σχολικό βιβλίο σελ. 23

A2) » » » σελ 25

A3) » » » σελ. 117

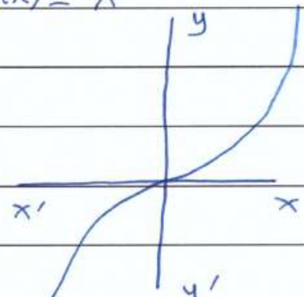
A4) » » » σελ. 135

A5) α) Η πρόταση είναι λάθος

Θεωρούμε τη συνάρτηση $f(x)=x^3$

Η f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με $f'(x)=3x^2$.

Προφανώς $f'(0)=0$, άρα το 0 είναι κρίσιμο σημείο της f.



Όμως όπως φαίνεται στο διπλανό σχήμα η f δεν παρουσιάζει ακρότατο στο 0.

β) Η πρόταση είναι σωστή

Πράγματι

$\forall x\in\mathbb{R} \quad -|f(x)| \le f(x) \le |f(x)|$

Είναι $\lim\limits_{x\to x_0}(-|f(x)|)=0=\lim\limits_{x\to x_0}(|f(x)|)$, άρα

από το Κ.Π. και $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=0$.

A6) Η σωστή απάντηση είναι το Γ

$f'(\pi) = -3\,\sigma\upsilon\nu^2(\pi+1)\cdot \eta\mu(\pi+1)$.

Μαρής Θωμάς Μαθηματικός

ΘΕΜΑ Β

Β1) Είναι $h(x)=\ln x,\ x>0$, $k(x)=x^2+2x-3,\ x\in\mathbb{R}$.

koh: $\begin{cases} x\in D_h \\ h(x)\in D_k \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x\in(0,+\infty) \\ \ln x\in\mathbb{R} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x>0 \\ x>0 \end{cases} \Rightarrow x>0$

Άρα $D_{koh}=(0,+\infty)$ και
$(koh)(x)=k(h(x))=k(\ln x)=\ln^2 x+2\ln x-3$.

hok: $\begin{cases} x\in D_k \\ k(x)\in D_h \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x\in\mathbb{R} \\ x^2+2x-3>0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x\in\mathbb{R} \\ x\in(-\infty,-3)\cup(1,+\infty) \end{cases}$

$\Rightarrow\ x\in(-\infty,-3)\cup(1,+\infty)$

Οπότε $D_{hok}=(-\infty,-3)\cup(1,+\infty)$ και
$(hok)(x)=h(k(x))=\ln(x^2+2x-3)$.

Β2) α) Η $f(x)=\ln^2 x+2\ln x-3$, $x\in(0,+\infty)$
είναι συνεχής και παραγ. στο $(0,+\infty)$ ως σύνθεση συνεχών και παραγ. συναρτήσεων με

$$f'(x)=2\ln x\cdot\frac{1}{x}+2\cdot\frac{1}{x}=\frac{2}{x}(\ln x+1),\ x\in(0,+\infty)$$

• Λύνω $f'(x)=0 \Leftrightarrow \frac{2}{x}(\ln x+1)=0 \Leftrightarrow \ln x=-1 \Leftrightarrow x=\frac{1}{e}$

• Λύνω $f'(x)>0 \Leftrightarrow \frac{2}{x}(\ln x+1)>0 \overset{x>0}{\Leftrightarrow} \ln x>-1 \Leftrightarrow x>\frac{1}{e}$

(3)

Άρα

x	$-\infty$	0		$1/e$		$+\infty$
$f'(x)$		‖	$-$	0	$+$	
$f(x)$		‖	$\searrow$		$\nearrow$	
				Τ.Ε.		

- Η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $(0, 1/e]$
- Η f είναι γνησίως αύξουσα στο $[1/e, +\infty)$
- Η f στο $x_0 = 1/e$ παρουσιάζει τοπικό ελάχιστο με τιμή $f(1/e) = \ln^2\frac{1}{e} + 2\ln\frac{1}{e} - 3 = -4$.

β) Είναι $\lim\limits_{x\to e} f(x) = \lim\limits_{x\to e}\left(\ln^2 x + 2\ln x - 3\right) = 0$

Ακόμα $\forall x \in \mathbb{R} - \{e\}$ ισχύει:

$$\left|f(x)\cdot \eta\mu\left(\frac{1}{x-e}\right)\right| \le |f(x)| \Leftrightarrow$$

$$-|f(x)| \le f(x)\cdot \eta\mu\frac{1}{x-e} \le |f(x)|$$

$$\lim_{x\to e}\left(-|f(x)|\right) = 0 = \lim_{x\to 0}|f(x)|$$

Άρα από Κ.Π. $\lim\limits_{x\to e} f(x)\cdot \eta\mu\left(\frac{1}{x-e}\right) = 0$.

γ) $e, \pi \in [1/e, +\infty)$ όπου $f \nearrow$ και

$$e < \pi \overset{f\nearrow}{\Leftrightarrow} f(e) < f(\pi) \Leftrightarrow$$
$$\ln^2 e + 2\ln e - 3 < \ln^2 \pi + 2\ln\pi - 3 \Leftrightarrow$$
$$\ln^2 e - \ln^2 \pi < 2(\ln\pi - \ln e) \Leftrightarrow$$
$$(\ln e - \ln\pi)(\ln e + \ln\pi) < 2\ln\left(\frac{\pi}{e}\right) \Leftrightarrow$$
$$\ln\left(\frac{e}{\pi}\right)\cdot \ln(e\pi) < 2\ln\left(\frac{\pi}{e}\right).$$

B3 Αρκεί να δείξω ότι υπάρχει $x_0 \in (\frac{1}{e}, 1)$ τέτοιο ώστε

$$f'(x_0) = \lambda_\eta \Leftrightarrow \frac{2}{x_0} \cdot (\ln x_0 + 1) = \frac{2}{3} \Leftrightarrow$$

$$3\ln x_0 + 3 = x_0 \Leftrightarrow 3\ln x_0 - x_0 + 3 = 0.$$

Θεωρώ τη συνάρτηση $\phi(x) = 3\ln x - x + 3$, $x \in [\frac{1}{e}, 1]$.

- Η ϕ είναι συνεχής στο $[\frac{1}{e}, 1]$ ως πράξεις συνεχών συναρτήσεων.
- $\phi(1/e) = 3\ln 1/e - 1/e + 3 = -1/e < 0$

  $\phi(1) = 3\ln 1 - 1 + 3 = 2 > 0$

  Άρα $\phi(1/e) \cdot \phi(1) < 0$ και από Θ. Bolzano υπάρχει ένα τουλάχιστον $x_0 \in (1/e, 1)$ τ.ω. $\phi(x_0) = 0 \Leftrightarrow 3\ln x_0 - x_0 + 3 = 0$.

B4 Η συνάρτηση $g(x) = \ln(x^2 + 2x - 3)$, $x \in (-\infty, -3) \cup (1, +\infty)$ είναι παραγ. στο πεδίο ορισμού της ως σύνθεση παραγ. συναρτήσεων με

$$g'(x) = \frac{2x+2}{x^2+2x-3}.$$

Λύνω $g'(x) = \lambda_\eta \Leftrightarrow \dfrac{2x+2}{x^2+2x-3} = \dfrac{2}{3} \Leftrightarrow$

$$2x^2 + 4x - 6 = 6x + 6 \Leftrightarrow 2x^2 - 2x - 12 = 0 \Leftrightarrow$$

$$x^2 - x - 6 = 0 \Leftrightarrow \underbrace{x_1 = -2}_{\text{Απορ.}} \text{ ή } \boxed{x_2 = 3}$$

Άρα το σημείο επαφής της ζητούμενης εφαπτομένης είναι το $A(3, g(3))$.

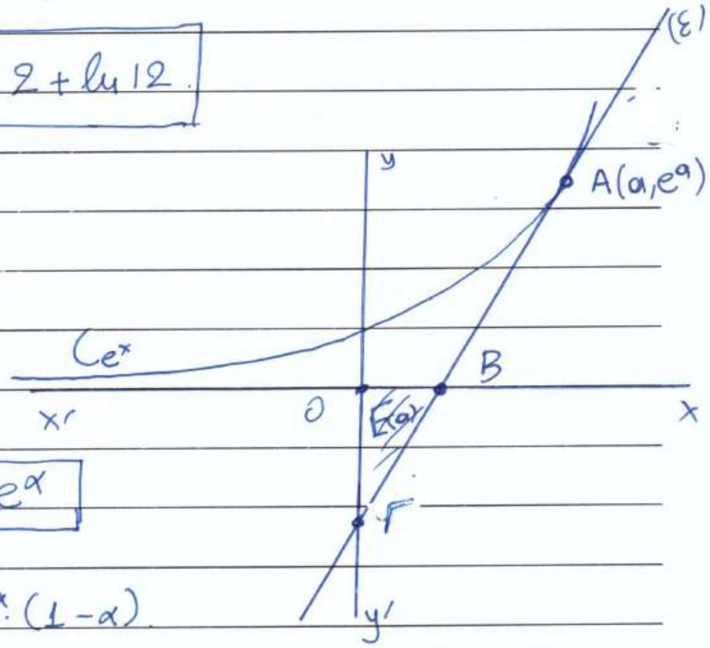
Η ζητούμενη εφαπτομένη είναι:

$$(\varepsilon): y - g(3) = g'(3)(x-3) \Leftrightarrow$$

$$(\varepsilon): y - \ln 12 = \frac{2}{3}(x-3) \Leftrightarrow$$

$$\boxed{(\varepsilon): y = \frac{2}{3}x - 2 + \ln 12}$$

ΘΕΜΑ Γ



Γ1 Η εφαπ. της $f(x)=e^x$ στο $A(\alpha, f(\alpha))$ είναι η $(\varepsilon): y - f(\alpha) = f'(\alpha)(x-\alpha)$

$\Leftrightarrow \boxed{(\varepsilon): y = e^{\alpha}\cdot x - \alpha e^{\alpha} + e^{\alpha}}$

• Για $x=0$, το $y = e^{\alpha}\cdot(1-\alpha)$

Άρα το σημείο Γ που τέμνει τον $y'y$ είναι $\Gamma(0, e^{\alpha}\cdot(1-\alpha))$

• Για $y=0$, το $x = \alpha - 1$

Άρα το σημείο Β που τέμνει τον $x'x$ είναι $B(\alpha-1, 0)$

Το $E(\alpha) = \frac{1}{2}\cdot|e^{\alpha}(1-\alpha)|\cdot|\alpha-1| = \frac{1}{2}e^{\alpha}\cdot|\alpha-1|^2 = \frac{1}{2}e^{\alpha}(\alpha-1)^2.$

Γ2 Η συνάρτηση $E(\alpha) = \frac{1}{2}e^{\alpha}\cdot(\alpha-1)^2$ είναι παραγ. στο $\mathbb{R}$ με

$$E'(\alpha) = \frac{e^{\alpha}}{2}\cdot(\alpha-1)^2 + \frac{e^{\alpha}}{2}\,2(\alpha-1) = \frac{e^{\alpha}}{2}\cdot(\alpha-1)(\alpha+1).$$

Λύνω $E'(a)=0 \iff a=1$ ή $a=-1$

Λύνω $E'(a)>0 \iff a\in(-\infty,-1)\cup(1,+\infty)$

Άρα

a	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
$E'(a)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$E(a)$		$\nearrow$		$\searrow$		$\nearrow$	
			Τ.Μ.		Τ.Ε.		

Η $E(a)$ είναι γνησίως αύξουσα στα $(-\infty,-1]$ και $[1,+\infty)$

Η $E(a)$ " " φθίνουσα στο $[-1,1]$

Η $E(a)$ στο $x_0=-1$ παρουσιάζει τοπικό μέγιστο με τιμή $E(-1)=\frac{2}{e}$

Η $E(a)$ στο $x_0=1$ παρουσιάζει τοπικό ελάχιστο με τιμή $E(1)=0$.

Στο $x_0=1$ η εφαπτομένη (ε) γίνεται $(\varepsilon): y=e\cdot x-e+e \iff (\varepsilon): y=ex$ που διέρχεται από το $O(0,0)$.

$\boxed{\Gamma 3}$ Για $a\geq 0$ θεωρώ τα διαστήματα:

$\Delta_1=[0,1)$ και $\Delta_2=[1,+\infty)$

• Η $E(a)$ είναι συνεχής και $\searrow$ στο Δ_1 άρα

$$E(\Delta_1)=\left(\lim_{a\to 1^-}E(a), E(0)\right]=\left(0,\frac{1}{2}\right].$$

Το $\frac{1}{2}\in E(\Delta_1)$ άρα η εξίσωση $E(a)=\frac{1}{2}$ έχει μοναδική λύση στο Δ_1 καθώς $E(a)$ $\searrow$ σ' αυτό.

• Η $E(\alpha)$ είναι συνεχής και $\nearrow$ στο Δ_2

άρα $E(\Delta_2) = [E(1), \lim\limits_{\alpha \to +\infty} E(\alpha)) = [0, +\infty)$

Το $\frac{1}{2} \in E(\Delta_2)$ άρα η εξίσωση $E(\alpha) = \frac{1}{2}$ έχει μοναδική λύση στο Δ_2 καθώς $E(\alpha) \nearrow$ σ'αυτό.
Οπότε η $E(\alpha) = \frac{1}{2}$ έχει ακριβώς 2 λύσεις στο $[0, +\infty)$.

Γ4 Για $x > 0$ είναι:

- $e^x > 1$
- $1 + x + \frac{1}{2}x^2 > 1$

Άρα αρκεί ν.δ.ο. $E(e^x) > E\left(1 + x + \frac{1}{2}x^2\right) \overset{E(\alpha)\nearrow}{\underset{\text{στο } [1,+\infty)}{\Longleftrightarrow}}$

$$\Leftrightarrow \quad e^x > 1 + x + \frac{1}{2}x^2.$$

Οπότε αρκεί ν.δ.ο. $\forall x > 0 \quad e^x > 1 + x + \frac{1}{2}x^2$.

Πράγματι:

Θεωρώ τη συνάρτηση $h(x) = e^x - 1 - x - \frac{1}{2}x^2, \ x \in \mathbb{R}$.

• Η h είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με

$$h'(x) = e^x - 1 - x$$

Παρατηρώ ότι $h'(0) = 0$.

• Η h' είναι παραγ. στο $\mathbb{R}$ με

$$h''(x) = e^x - 1.$$

Λύνω $h''(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$

" $h''(x) > 0 \Leftrightarrow x > 0$

Άρα

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$h''(x)$		$-$	0	$+$	
$h'(x)$		$\searrow$		$\nearrow$	

8

Για την $h'(x) = e^x - 1 - x$ έχω ότι είναι ↗ στο $[0, +\infty)$, άρα

Αν $x > 0 \overset{h' \nearrow}{\Leftrightarrow} h'(x) > h'(0) \Leftrightarrow h'(x) > 0$.

Οπότε τελικά και η $h(x)$ είναι ↗ στο $[0, +\infty)$ και για κάθε $x > 0$ έχω:

$$x > 0 \overset{h \nearrow}{\Leftrightarrow} h(x) > h(0) \Leftrightarrow h(x) > 0 \Leftrightarrow$$
$$e^x > 1 + x + \frac{1}{2}x^2.$$

Γ5) Είναι $a'(t) = 1$ cm/sec. και

$$E(a(t)) = \frac{1}{2} e^{a(t)} \cdot (a(t) - 1)^2.$$

Τότε $E'(a(t)) \cdot a'(t) = \frac{1}{2} e^{a(t)} \cdot a'(t) \cdot (a(t) - 1)^2 + e^{a(t)} \cdot (a(t) - 1) \cdot a'(t)$.

Τότε για τη χρονική στιγμή t_0 στην οποία $a(t_0) = 2$ και $a'(t_0) = 1$ έχω:

$$E'(2) \cdot 1 = \frac{e^2}{2} \cdot 1 \cdot (2-1)^2 + e^2 \cdot (2-1) \cdot 1 \Leftrightarrow$$

$$\boxed{E'(2) = \frac{3e^2}{2} \text{ cm}^2/\text{sec}}$$

⑨ ΘΕΜΑ Δ

Δ1) Αφού η C_f εφάπτεται στον $x'x$ στο $O(0,0)$ τότε $f(0)=0$ και $f'(0)=0$.

$\forall x\in\mathbb{R}$ $\quad (x^2+1)\cdot f''(x) = 1 - 2x f'(x) \Leftrightarrow$

$$(x^2+1)\cdot f''(x) + 2x f'(x) = 1 \Leftrightarrow$$

$$\left[(x^2+1) f'(x)\right]' = (x)'$$

Άρα $\quad (x^2+1)\cdot f'(x) = x + c_1, \quad x\in\mathbb{R}$.

Για $x=0$, $c_1=0$ οπότε:

$$(x^2+1) f'(x) = x \overset{x^2+1\neq 0}{\underset{\forall x\in\mathbb{R}}{\Leftrightarrow}} f'(x) = \frac{x}{x^2+1}, \quad x\in\mathbb{R} \quad (1)$$

Για κάθε $x\in\mathbb{R}$ η $k(x) = 2f(x) - \ln(x^2+1)$ είναι παραγ. στο $\mathbb{R}$ ως σύνθεση και πράξεις παραγωγίσιμων συναρτήσεων και ισχύει

$$k'(x) = 2f'(x) - \frac{2x}{x^2+1} \overset{(1)}{=} \frac{2x}{x^2+1} - \frac{2x}{x^2+1} = 0.$$

Οπότε $\forall x\in\mathbb{R}$ $\quad k'(x)=0$, άρα η $k(x)=c_2, x\in\mathbb{R}$.

Για κάθε $x\in\mathbb{R}$ $\quad k(x)=c_2 \Leftrightarrow 2f(x) - \ln(x^2+1) = c_2$

Για $x=0$, $c_2=0$ οπότε

$$2f(x) = \ln(x^2+1) \Leftrightarrow \boxed{f(x) = \frac{\ln(x^2+1)}{2}, \quad x\in\mathbb{R}}$$

10

Δ2) $\forall x \in \mathbb{R}$ $\left|\frac{x}{x^2+1}\right| \le \frac{1}{2} \overset{x^2+1>0}{\iff} \frac{|x|}{x^2+1} \le \frac{1}{2}$

$\iff 2|x| \le x^2+1 \iff x^2-2|x|+1 \ge 0 \iff$

$\iff |x|^2-2|x|+1 \ge 0 \iff (|x|-1)^2 \ge 0$ ισχύει.

Θέλω να δείξω ότι $|f(b)-f(a)| \le \frac{1}{2}|b-a|$ (1)

- Αν $b=a$ τότε προφανώς η (1) ισχύει.
- Αν $b \ne a$ τότε η (1) γίνεται: (διαιρώ με $|b-a|>0$)

(2) $\left|\frac{f(b)-f(a)}{b-a}\right| \le \frac{1}{2}$, άρα αρκεί ν.δ.ο. ισχύει η νέα σχέση (2).

Υποθέτω ότι $a<b$ τότε θεωρώ το διάστημα $[a,b]$ και η f ικανοποιεί τις προϋποθέσεις του Θ.Μ.Τ. στο διάστημα αυτό, άρα υπάρχει ένα τουλάχιστον $\xi \in (a,b)$ τ.ω.

$$f'(\xi) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}.$$

Όμως έδειξα ότι $\forall x \in \mathbb{R}$ $\left|\frac{x}{x^2+1}\right| \le \frac{1}{2} \iff$

$\iff |f'(x)| \le \frac{1}{2}$, άρα για $x=\xi$ θα είναι

$|f'(\xi)| \le \frac{1}{2} \iff \left|\frac{f(b)-f(a)}{b-a}\right| \le \frac{1}{2}$.

Ομοίως αποδεικνύεται αν $\alpha > \beta$.

Δ3) Η συνάρτηση $g(x) = 2f(x) - \dfrac{2x^2}{x^2+1} =$

$$= \ln(x^2+1) - \frac{2x^2}{x^2+1}, \quad x \in \mathbb{R}$$

Είναι συνεχής και παραγ. στο $\mathbb{R}$ με

$$g'(x) = \frac{2x}{x^2+1} - \frac{4x(x^2+1) - 2x \cdot 2x^2}{(x^2+1)^2} =$$

$$= \frac{2x(x^2+1) - \cancel{4x^3} - 4x + \cancel{4x^3}}{(x^2+1)^2} =$$

$$= \frac{2x^3 + 2x - 4x}{(x^2+1)^2} = \frac{2x^3 - 2x}{(x^2+1)^2} = \frac{2x(x^2-1)}{(x^2+1)^2}.$$

Λύνω $g'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$ ή $x = 1$ ή $x = -1$

Λύνω $g'(x) > 0 \Leftrightarrow x \in (-1, 0) \cup (1, +\infty)$ άρα

x	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
$g'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
$g(x)$		$\searrow$		$\nearrow$		$\searrow$		$\nearrow$	
			Τ.Ε.		Τ.Μ.		Τ.Ε.		
			$g(-1) = \ln 2 - 1$		$g(0) = 0$		$g(1) = \ln 2 - 1$.		

Θεωρώ τα διαστήματα $\Delta_1 = (-\infty, -1]$ και $\Delta_2 = [1, +\infty)$

(12)

Η g είναι συνεχής και $\downarrow$ στο Δ_1

άρα $g(\Delta_1) = [g(-1), \lim\limits_{x\to-\infty} g(x))$.

- $g(-1) = \ln 2 - 1 < 0$

- $\lim\limits_{x\to-\infty} g(x) = \lim\limits_{x\to-\infty} \left[\ln(x^2+1) - \dfrac{2x^2}{x^2+1}\right] = A$

  - $\lim\limits_{x\to-\infty} \ln(x^2+1) \underset{\substack{\cdot\, x\to-\infty \\ \cdot\, y\to+\infty}}{\overset{\text{Θέτω } x^2+1=y}{=\!=\!=}} \lim\limits_{y\to+\infty} \ln y = +\infty$

  - $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{2x^2}{x^2+1} = \lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{2x^2}{x^2} = 2$

Άρα $A = +\infty$.

Οπότε $g(\Delta_1) = [\ln 2 - 1, +\infty)$. Το $0 \in g(\Delta_1)$ άρα η εξίσωση $g(x) = 0$ έχει μία τουλάχιστον ρίζα $x_0 \in \Delta_1$ που είναι μοναδική αφού $g \downarrow$ σ' αυτό.

Η g είναι συνεχής και $\nearrow$ στο Δ_2 άρα

$g(\Delta_2) = [g(1), \lim\limits_{x\to+\infty} g(x))$

- $g(1) = \ln 2 - 1 < 0$
- $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} \left[\ln(x^2+1) - \dfrac{2x^2}{x^2+1}\right] = +\infty$

(Όμοια με $\lim\limits_{x\to-\infty} g(x) = +\infty$).

Άρα $g(\Delta_2) = [\ln 2 - 1, +\infty)$. Το $0 \in g(\Delta_2)$ άρα η εξίσωση $g(x) = 0$ έχει μία τουλάχιστον ρίζα $x_1 \in \Delta_2$ που είναι μοναδική αφού $g \nearrow$ σ' αυτό.

Αν $x \in [-1,1]$ τότε:

• Για $-1 \le x < 0 \overset{g\nearrow}{\Leftrightarrow} g(-1) \le g(x) < g(0) \Leftrightarrow$ $\ln 2 - 1 \le g(x) < 0$.

• Για $0 < x \le 1 \overset{g\searrow}{\Leftrightarrow} g(0) > g(x) \ge g(1) \Leftrightarrow$ $\ln 2 - 1 \le g(x) < 0$.

• Ακόμα $g(0) = 0$.

Οπότε η $g(x) = 0$ έχει, στο $[-1,1]$ μοναδική ρίζα το 0.

Δ4| Η συνάρτηση $h(x) = \frac{x}{2f(x)} = \frac{x}{\ln(x^2+1)}, \ x \in \mathbb{R}^*$

είναι παραγωγίσιμη στο στο $\mathbb{R}^*$ με

$$h'(x) = \frac{\ln(x^2+1) - x \cdot \frac{2x}{x^2+1}}{\ln^2(x^2+1)} = \frac{g(x)}{\ln^2(x^2+1)}, \ x \in \mathbb{R}^*$$

Το πρόσημο της h' ταυτίζεται με αυτό της g. Η g όπως δείξαμε στο $Δ_3$ έχει τρεις ρίζες $x_0, 0, x_1$ με $x_0 < -1$ και $x_1 > 1$.

• Αν $x \in (-\infty, -1)$ τότε:

▪ Για $x < x_0 \overset{g\searrow}{\Leftrightarrow} g(x) > g(x_0) \Leftrightarrow g(x) > 0$.
▪ Για $x > x_0 \overset{g\searrow}{\Leftrightarrow} g(x) < g(x_0) \Leftrightarrow g(x) < 0$.

• Αν $x \in (-1, 0)$ δείξαμε $g(x) < 0$.

14

- Αν $x \in (0,1]$ δείξατε ότι $g(x)<0$.

- Αν $x \in (1,+\infty)$ τότε:

  - Για $x<x_1 \overset{g\uparrow}{\Leftrightarrow} g(x)<g(x_1) \Leftrightarrow g(x)<0$
  - Για $x>x_1 \overset{g\uparrow}{\Leftrightarrow} g(x)>g(x_1) \Leftrightarrow g(x)>0$.

Τελικά έχω τον εξής πίνακα:

x	$-\infty$		x_0		0		x_1		$+\infty$
$h'(x)$		$+$	0	$-$	‖	$-$	0	$+$	
$h(x)$		↗		↘	‖	↘		↗	
			Τ.Μ.				Τ.Ε.		

Άρα η h παρουσιάζει ένα τοπικό μέγιστο στο x_0 και ένα τοπικό ελάχιστο στο x_1.